

Aplicação do gráfico de controle de média móvel exponencialmente ponderada (EWMA) para monitorar a variabilidade de um processo produtivo

Wesley Vieira da Silva¹ Paulo Sergio Macuchen Nogas¹ Eduardo Damião da Silva¹ Luciana Santos Costa²

wesley.vieira@pucpr.br paulo.nogas@pucpr.br eduardo.damiao@pucpr.br lucvcosta@gmail.com

¹ Pontifícia Universidade Católica do Paraná (PUCPR), CCSA/PPAD – Curitiba, PR, Brasil

² Universidade do Sul de Santa Catarina (UNISUL) – Tubarão, SC, Brasil

RESUMO

Este trabalho utiliza-se da carta de média móvel exponencialmente ponderada (EWMA), visando monitorar a variabilidade e a estabilidade do teor de pureza de uma indústria química situada no Sul do Estado de Santa Catarina. Salienta-se que o teor de pureza deve ser superior a 85%, segundo as especificações do mercado. A carta utilizada, com constante de alisamento $\lambda = 0,55$, identificou um ponto fora dos limites de controle, apresentando um padrão que pode ser classificado como não natural. Deste modo, o processo produtivo não se encontra em estado de controle estatístico; ou seja, sua variabilidade é bem maior que a variabilidade natural.

Palavras Chave: Média Móvel exponencialmente ponderada; Gráficos de Controle; Indústria Química.

1 INTRODUÇÃO

Ao produzir um produto, as características destes apresentam variação inevitável devido aos diversos fatores que compõem o processo produtivo. Portanto, é necessário que esta variabilidade seja controlada de modo que os potenciais produtores possam fabricá-los tendo uma boa qualidade e garanta uma maior adequação ao seu uso.

O controle estatístico de processos é uma ferramenta de grande importância para o monitoramento de um processo produtivo. Esta ferramenta é representada através dos gráficos de controle desenvolvido por Walter A. Shewhart, durante a década de 20, que permite processar e dispor informações que possam ser utilizadas na identificação dos tipos de causas para a variação da qualidade dos produtos resultantes de um processo.

Uma primeira suposição implícita na estrutura do modelo de Shewhart é que a característica da qualidade (X_t) que está sendo monitorada presente, enquanto o processo estiver sob o estado de controle estatístico, uma distribuição normal com média μ e variância σ^2 ; isto é, $X_t \sim N(\mu, \sigma^2)$. Por outro lado, uma outra suposição assume que as observações consecutivas de X_t são independentes entre si. Tal suposição é frequentemente violada, dado que independência entre valores consecutivos de X_t dificilmente ocorrem em problemas físicos reais.

A construção da carta Shewhart, considerando uma estrutura de dados correlacionados, aumenta consideravelmente a frequência de alarmes falsos. Uma solução proposta por Box & Jenkins (1976) consiste em modelar a estrutura de correlação com um modelo de séries temporais adequado, obtendo a partir disso, os resíduos de tal modelo e usá-los para montar uma carta de controle, obtendo-se seus limites. A partir daí o modelo deve ser

aplicado aos novos dados do processo, onde é calculado os resíduos a cada novo ponto e plotado na carta de controle já dimensionada.

A carta de Shewhart é robusta para detectar grandes mudanças ($\Delta \geq 3\sigma/\sqrt{n}$) no processo produtivo. A lentidão para detectar pequenas magnitudes na sensibilidade do processo é de fato a consequência natural da grande proteção contra alarmes falsos. Todavia, processos tais como os da indústria química, onde cada batelada de produção demora várias horas para ser processada e são altamente sensíveis a pequenas variações nos insumos de produções, necessitam de cartas especiais para o seu monitoramento.

As cartas *EWMA* e *CUSUM*, procuram compensar a lentidão da carta de Shewhart. Podem ser utilizadas quando existir o interesse em mensurar pequenas alterações no sistema produtivo ($\Delta < 3\sigma/\sqrt{n}$), o que reduziria de forma significativa a variabilidade previamente detectada.

Este artigo está estruturado da seguinte forma: a primeira seção refere-se a introdução. A segunda seção tecerá breves considerações acerca do gráfico de controle estatístico de processos chamada de Exponencial de Médias Móveis Ponderada (*EWMA*). A terceira seção evidencia os resultados empíricos e a quarta seção tece algumas considerações e sugestões para trabalhos futuros.

2- O GRÁFICO DE CONTROLE DE MÉDIA MÓVEL EXPONENCIALMENTE PONDERADA (*EWMA*)

Como foi mencionado anteriormente, a grande desvantagem das cartas de Shewhart, é que estas usam a informação sobre o processo contido no último ponto calculado, sendo que este ponto não incorpora informações sobre o passado do processo. Como o passado é ignorado, as cartas de Shewhart são poucos sensíveis para detectar pequenos deslocamentos na média do processo.

A carta *EWMA* foi inicialmente proposta por Roberts [1959] para aplicações em controle de qualidade com variáveis aleatórias, independentes e identicamente distribuídas (*i.i.d.*) e tem como objetivo suprir a deficiência apresentada pela carta de Shewhart; ou seja, incorporar diretamente o comportamento passado no ponto presente. O modelo que define a carta *EWMA* é dado da seguinte forma:

$$\hat{Z}_t = \alpha Z_t + (1-\alpha)\hat{Z}_{t-1}; \text{ com } 0 < \alpha \leq 1 \quad (1)$$

Onde:

Z_t : previsão para característica da qualidade no período t ;

X_t : característica da qualidade real para o período t ;

α : constante de suavização ou de alisamento;

Z_{t-1} : previsão para a característica da qualidade para o período $t-1$.

A demonstração de que o modelo (1) constitui, de fato, uma média ponderada para todas as observações, pode ser obtida desenvolvendo recursivamente a equação (1). Substituindo o valor de Z_{t-1} que seria dado pela equação (1), tem-se que:

$$Z_t = \alpha X_t + (1 - \alpha)[\alpha X_{t-1} + (1 - \alpha)Z_{t-2}]$$

ou desta forma:

$$Z_t = \alpha X_t + (1 - \alpha)\alpha X_{t-1} + (1 - \alpha)^2 Z_{t-2}$$

substituindo Z_{t-2} pelo valor dado pela equação (1), tem-se assim:

$$Z_t = \alpha X_t + (1 - \alpha)\alpha X_{t-1} + (1 - \alpha)^2 [\alpha X_{t-2} + (1 - \alpha)Z_{t-3}]$$

ou ainda,

$$Z_t = \alpha X_t + (1 - \alpha)\alpha X_{t-1} + (1 - \alpha)^2 \alpha X_{t-2} + (1 - \alpha)^3 Z_{t-3}$$

A expressão acima indica que a característica da qualidade real X_t aparece em todas as expressões da característica da qualidade prevista para um período qualquer t ; indicando também, que quanto mais antiga a característica da qualidade real exponencialmente, menor o peso com que aparece na expressão de Z_t . Ao final, caso seja desenvolvido toda a expressão, apenas o valor da característica prevista Z_0 , que foi adotado, irá aparecer ao lado de todas as características da qualidade real, ou seja:

$$Z_t = \alpha X_t + (1 - \alpha)\alpha X_{t-1} + (1 - \alpha)^2 \alpha X_{t-2} + (1 - \alpha)^3 \alpha X_{t-3} + \dots + (1 - \alpha)^{t-1} \alpha X_0 + (1 - \alpha)^t Z_0 \quad (2)$$

Generalizando a expressão acima, tem-se:

$$Z_t = (1 - \alpha)^t Z_0 + \alpha \sum_{j=0}^{t-1} (1 - \alpha) X_{t-j} \quad (3)$$

Onde :

Z_0 : representa o valor de inicialização, geralmente representado pelo nível médio do processo.

Se as observações X_t são variáveis aleatórias independentes, com variância σ^2 , então a variância de Z_t será:

$$\sigma_{Z_t}^2 = \sigma^2 \left(\frac{\alpha}{2 - \alpha} \right) [1 - (1 - \alpha)^{2t}] \quad (4)$$

Por outro lado, os limites de controle da carta *EWMA* podem ser definidos como segue:

$$LSC = \mu_0 + L\sigma \sqrt{\frac{\alpha}{2 - \alpha} [1 - (1 - \alpha)^{2t}]} \quad (5)$$

$$\boxed{LC = \mu_0} \quad (6)$$

$$\boxed{LIC = \mu_0 - L\sigma \sqrt{\frac{\alpha}{2-\alpha} [1 - (1-\alpha)^{2t}]}} \quad (7)$$

NETO (1999), enfatiza que o gráfico de Exponencial de Médias Móveis Ponderada (*EWMA*), possui uma ampla variedade de aplicações. Dentre elas encontra-se a previsão de tendência não estacionária do nível do processo, permitindo deste modo, que a média do processo oscile livremente ao longo do tempo. Tal aspecto torna-se importante pois as previsões através do *EWMA* podem ser utilizadas visando determinar ajustes *feedback* necessários para manutenção do nível do processo próximo do valor desejado.

3 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS EMPÍRICOS

Nesta seção, verificam-se as hipóteses de independência da variável utilizada, bem como a hipótese de normalidade, posteriormente procede-se a estimação do modelo *ARIMA* (p,d,q), aplicando-se posteriormente a carta *EWMA* para as medidas do teor de pureza (%) de uma substância química, de uma indústria do Sul do Estado de Santa Catarina, com o objetivo de verificar se o processo está ou não sob controle estatístico.

3.1. Verificação da hipótese de independência.

Nesta subseção, utiliza-se a função de autocorrelação amostral de modo a verificar se a distribuição de probabilidades dos teores de pureza são variáveis aleatórias independentes.

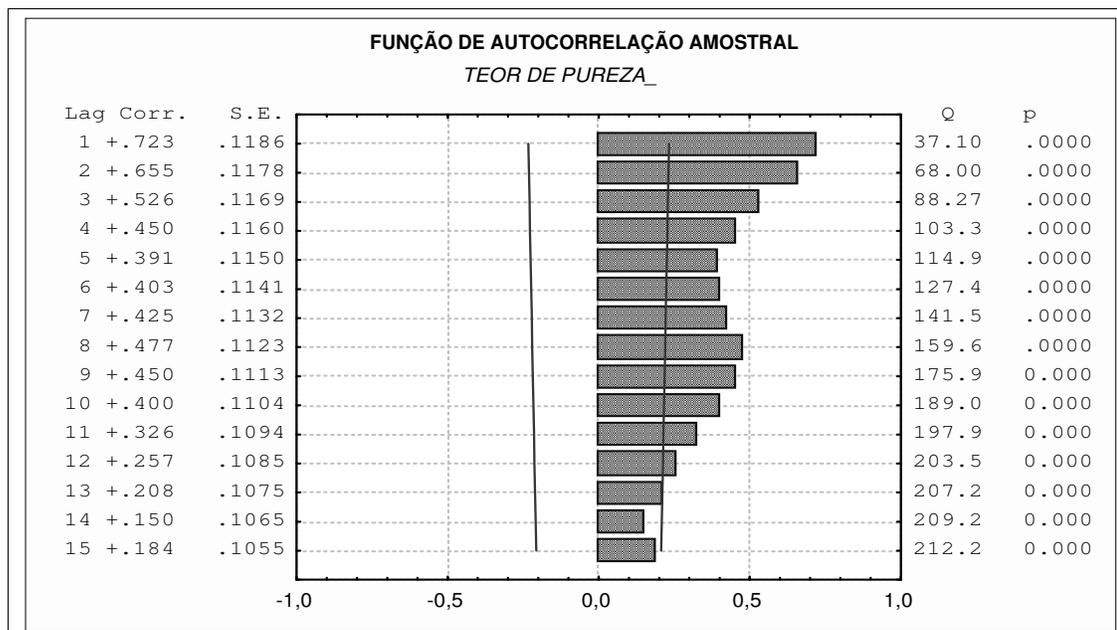


FIGURA 1 – GRÁFICO DA FUNÇÃO DE AUTOCORRELAÇÃO AMOSTRAL PARA AS OBSERVAÇÕES INDIVIDUAIS DA VARIÁVEL TEOR DE PUREZA (%)

A figura 1, indica que há autocorrelação estatisticamente significativa até o 12º período de defasagem. Do lado esquerdo, tem-se o número de defasagens (lag), a correlação (corr) e o respectivo erro padrão de estimativa (S.E). Do lado direito, apresenta-se a estatística Portmanteau (Q) e sua respectiva significância estatística, dado pelo valor de p . Neste caso, considera-se o nível de significância de 1%, aceitando-se a hipótese da presença de autocorrelação no processo, sugerindo-se assim, o ajuste dos dados a um modelo de série temporal adequado às observações individuais, aplicando-se a carta *EWMA* nos resíduos provenientes deste modelo.

3.2 Verificação da hipótese de normalidade

Os limites de controle do gráfico *EWMA* são bastante sensíveis à violação da suposição de que as observações da variável de interesse X_t seguem uma distribuição normal. A hipótese de normalidade do conjunto de dados disponíveis para a avaliação da estabilidade do processo pode ser visualizada pelo gráfico de probabilidade normal e pelo teste não-paramétrico de Shapiro-Wilks.

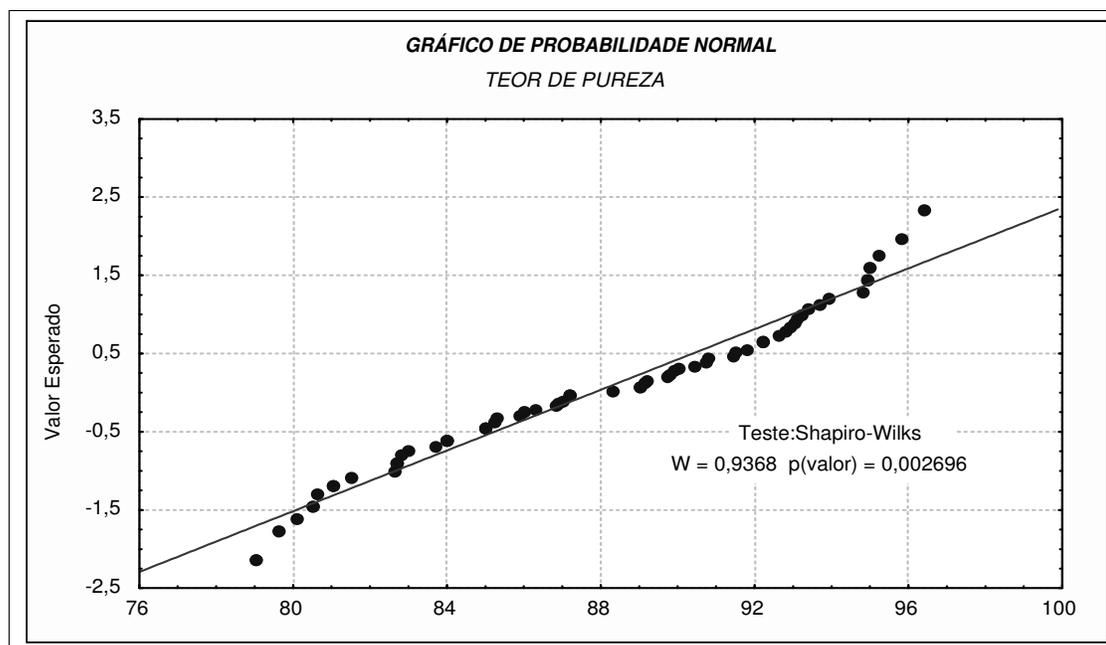


FIGURA 2 – GRÁFICO DE PROBABILIDADE NORMAL, PARA DISTRIBUIÇÃO DOS TEORES DE PUREZA, DE UMA SUBSTÂNCIA QUÍMICA.

Analisando a figura 2, observa-se que os pontos não estão localizados ao longo de uma reta. O teste de Shapiro-Wilks aponta evidências que contrariam a ideia de normalidade ao nível de significância de 1%. Como a variável em questão não tem uma distribuição próxima da normal, opta-se em transformar a variável original em uma nova variável que seja aproximadamente normal.

3.3 A modelagem ARIMA (p, d, q)

Para identificar os valores de (p,d,q) , inicialmente diferencia-se a série de entrada (X_t) , uma vez que na figura 1, existem evidências de que as variáveis são não estacionários. Um processo estacionário é obtido, quando a função autocorrelação amostral (*f.a.c.*) de $Z_t = \Delta X_t$ decresce rapidamente para próximo de zero.

A figura 3 a seguir, mostra que a série Z_t decresce rapidamente para próximo de zero após a primeira defasagem, indicando que o processo tornou-se estacionário. Diz-se então que a série Z_t é integrada de primeira ordem ($d = 1$).

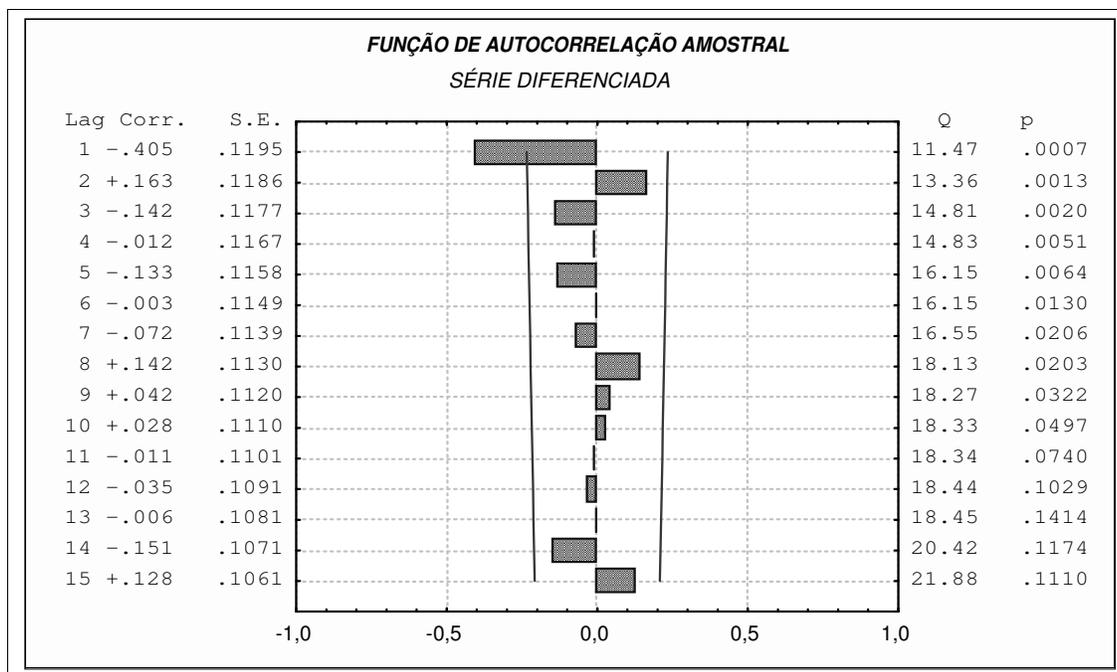


FIGURA 3 – GRÁFICO DA FUNÇÃO DE AUTOCORRELAÇÃO PARCIAL, PARA AS OBSERVAÇÕES INDIVIDUAIS, DA VARIÁVEL TEOR DE PUREZA DE UMA SUBSTÂNCIA QUÍMICA

Os valores de p e q são obtidos através das análises das autocorrelações e autocorrelações parciais estimadas, cujos comportamentos devem imitar os comportamentos das respectivas quantidades teóricas. A função de autocorrelação amostral apresentada na figura 3, evidenciando que somente a primeira autocorrelação é diferente de zero. Isso sugere que o processo avaliado é uma média móvel de primeira ordem, ou de forma abreviada, MA(1).

Os parâmetros do modelo ARIMA (0,1,1) ou IMA(1,1), foram obtidos pelo método das estimativas de máxima verossimilhança implementadas no programa computacional *Statistica for Windows*. O modelo de série temporal que mais adequadamente descreve o comportamento do teor pureza da substância química, ou seja, IMA (1,1) pode ser descrito da seguinte forma:

$$\boxed{I} \quad (8)$$

Onde:

\hat{a}_{t-1} : representa uma seqüência de resíduos (ruído branco) com desvio padrão $\sigma_a = 3,354$, no instante t ;

Z_t : representa a distribuição do comportamento do teor de pureza projetada da substância química, diferenciada uma vez, no instante t .

A figura 4 apresenta os resultados da análise dos resíduos do modelo (8) estimado, cuja função de autocorrelação amostral e o teste Portmanteu, sustenta a hipótese de erros (ruídos brancos) ao nível de significância de 1%.

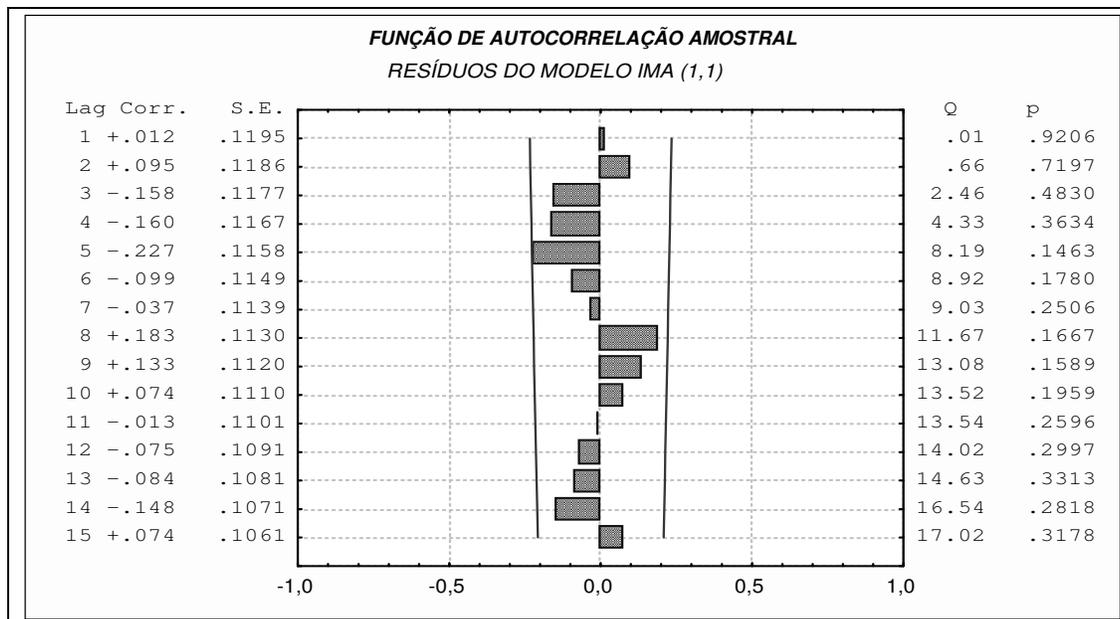


FIGURA 4 – FUNÇÃO DE AUTOCORRELAÇÃO AMOSTRAL DOS RESÍDUOS PROVENIENTES DO MODELO IMA (1,1)

A hipótese de que os resíduos independentes, provenientes do IMA (1,1) são normais, podem ser visualizados no gráfico de probabilidade normal para os resíduos *plotados* na figura 5 abaixo. O teste não paramétrico de Shapiro-Wilks corrobora com esta decisão, ao nível de significância de 1%.

Como pode ser visualizado a partir da figura acima, há evidências de uma diminuição do teor de pureza da substância química, conforme aponta a batelada de número 31. A partir deste ponto nota-se a ocorrência da estabilização do processo em um nível mais baixo do teor de pureza.

De acordo com os testes seqüenciais é possível identificar outros comportamentos na carta *EWMA* que indiquem instabilidade no processo, como aponta as observações abaixo mencionadas:

- Quatorze pontos consecutivos alternando-se para cima e para baixo, da batelada de número 20 à 33 e da batelada de número 21 à 34;
- Quatro em cinco pontos consecutivos situados nas zonas A ou B de um mesmo lado do gráfico, da batelada de número 60 à 64; número 61 à 65 e número 62 à 66.

Embora a carta *EWMA* tenha apontado que o processo está fora de controle a partir da batelada número 31, através dos testes seqüenciais, foi detectada pela carta, que a falta de controle apresentou-se a partir da batelada número 20. Assim, cabe ao responsável pela produção, investigar a causa dessa instabilidade no processo e promover ações corretivas a fim de que se retorne à estabilidade.

Vale salientar, que muitas vezes as mudanças a serem feitas no processo demandam uma troca de equipamento ou até mesmo de projeto, devendo a administração contabilizar os custos e benefícios provenientes da mudança, para que a falta de provisão de recursos impeça dar continuidade às mudanças e, com isso, acarrete mais problemas. Entretanto é sempre viável e necessário investir em qualidade, pois os ganhos obtidos na grande maioria das vezes são sempre satisfatório, seja a curto ou a longo prazo.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS E RECOMENDAÇÕES

De acordo com o que foi apresentado, constata-se que a carta *EWMA* possui um bom desempenho na detecção de instabilidades em processos produtivos que apresentam desvios pequenos e difíceis de serem apontados pelas castas tradicionalmente utilizadas, como as cartas de Shewhart.

O presente trabalho utilizou-se da metodologia de séries temporais para modelar a estrutura de dados neste utilizada. Observou-se que os dados violaram as suposições básicas de independência estatística e identicamente distribuídos, propondo assim o modelo que foi apresentado. A série de entrada X_t , foi submetida ao operador diferença, para induzir a estacionariedade nos dados.

O modelo de série temporal ajustado a série Z_t , IMA (1,1), apresenta coeficiente estatisticamente significativo e estável, bem como a menor variância residual. O teste Portmanteu, aplicado para distribuição dos resíduos do modelo estimado, não evidenciou autocorrelações residuais significativa.

A carta *EWMA*, com constante de suavização $\alpha = 0,55$, recomenda que a empresa investigue as causas que estão provocando o desajuste do processo e promova ações corretivas apropriadas para estabilizar o processo e depois mantê-lo sob controle estatístico.

Recomenda-se para trabalhos futuros, que os custos gerados pela instabilidade do processo sejam calculados e com isso busque otimizá-lo de forma a complementar o estudo realizado. Além disso, sugere-se que modelos *ARIMA* (p,d,q) com intervenção sejam estimados com o objetivo de classificar o efeito das observações espúrias.

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

BOX, G. E. P, JENKINS G. M. *Times series analysis: forecasting and control*. Golden –Day, San Francisco, 1976.

BOX, G. E. P, JENKINS G. M. & MACGREGOR, J. F. Some recents advances in forecasting and control. *Applied. Statistics*, v.23, nº 2, pp. 158-179, 1974.

KUME, H. *Métodos Estatísticos para a Melhoria da Qualidade*. São Paulo: Editora Gente, 1993.

MONTGOMERY, Douglas C. *Introduction to Statistical Quality Control*, 3rd ed. Wiley, N.Y.,1997.

NETO, João Caldas do Lago. *O Efeito da Autocorrelação em Gráficos de Controle para Variável de Controle Contínua: Um Estudo de Caso*. Dissertação de Mestrado pela EPS/UFSC. Florianópolis, 1999.

ROBERTS, S. W. “Control Chart Tests Based on Geometric Moving Averages”, *Technometrics*, vol. 1. 1959.

WERKEMA, M. C. C. *Ferramentas Estatística Básicas para o Gerenciamento de Processos*. Belo Horizonte , MG: Fundação Christiano Ottoni, Escola de Engenharia da UFMG, 1995.